



## Algoritmos para identificar estruturas críticas em uma rede de transporte hub-and-spoke

### Algorithms to identify critical structures in a hub-and-spoke transportation network

Hugo Quadros<sup>1</sup>

Marcos Costa Roboredo<sup>2</sup>

Artur Alves Pessoa<sup>3</sup>

**Resumo:** Hubs são facilidades especiais que servem como transbordo e pontos de troca em sistemas de transporte de algum tipo de fluxo, geralmente produtos ou dados. Fluxos diferentes podem ser agregados e transportados através dos hubs antes de chegar aos seus destinos, diminuindo o custo total de transporte em decorrência do desconto no custo unitário de transporte entre hubs. O funcionamento de um hub está sujeito à interdição total ou parcial, desativando suas capacidades funcionais normais. Um hub interdito não pode ser utilizado e, por isso, todos os fluxos que utilizem esse hub devem ser realocados para outro hub, ocasionando um aumento de custo indesejado. Neste contexto, o presente trabalho lida com o Problema da Mediana com Interdição em Hubs (PMIH), que consiste em identificar em uma rede de transporte o subconjunto de hubs que, uma vez interditos, provocam o maior aumento no custo total de transporte. A primeira contribuição para o problema dada neste trabalho é a proposição de um estudo que mostra que o modelo exato existente na literatura demanda um tempo computacional várias ordens de magnitude maior do que um algoritmo puramente enumerativo para todos os tamanhos de instância testados. Assim, é proposta aqui também uma heurística gulosa para o problema, onde é mostrado que esta encontra a solução ótima para grande parte as instâncias testadas..

**Palavras-chave:** Otimização combinatória, heurística, interdição em hubs.

<sup>1</sup> UFF – Universidade Federal Fluminense

<sup>2</sup> UFF – Universidade Federal Fluminense

<sup>3</sup> UFF – Universidade Federal Fluminense

**Abstract:** Hubs are special facilities that work as transshipment and trade points on transport systems of any kind of flow, usually products or data. Different flows can be aggregated and transported through hubs before they get to its destinies, decreasing the total transportation cost because of the unitary transportation cost discount between hubs. The hub operation is subjected to total or partial disruptions, deactivating its normal functional capacities. An interdicted hub can't be used and, for that reason, all flows that use that hub must be reallocated for another hub, causing an unwanted cost increasing. In that context, this present work deals with the hub interdiction median problem (HIM), that consists in identifying, in a transportation network, the subset of hubs that, once interdicted, causes the higher increase in the total transportation cost. The first contribution to that problem given by this work is the proposition of a study that shows that the exact model found in the literature demands a computational time several orders of magnitude larger than a purely enumerative algorithm for all instance sizes considered. Therefore, here it is also proposed a greedy heuristic for the problem, showing that it finds the optimal solution for most tested instances.

**Keywords:** Combinatorial Optimization, heuristic, hub interdiction.

---

## 1. Introdução

Hubs são facilidades especiais que servem como transbordo e pontos de troca em sistemas de transporte de produtos ou dados onde é necessário transferir fluxos entre pares origem e destino. Fluxos diferentes podem ser agregados e transportados através dos hubs antes de chegar aos seus destinos e isto diminui o custo total de transporte pois há um desconto no custo unitário de transporte entre hubs. Além disso, o transporte entre hubs reduz o número de possíveis rotas durante o transporte, diminuindo assim possíveis perdas. Este modelo de transporte é muito aplicado em linhas aéreas, onde os nós representam os aeroportos e as arestas representam os planos de voo, utilizando escalas como facilidades intermediárias (hubs). Além de aplicações em redes aéreas [Button (2002)], pode-se citar também outras aplicações deste modelo como em sistemas logísticos [Ishfaq e Sox (2011)] e em redes de telecomunicações [Kim e O’Kelly (2009)].

O funcionamento de um hub em uma rede de disseminação de fluxos está sujeito à interdição total ou parcial, desativando suas capacidades funcionais normais. Um hub interdito não pode transportar fluxos (parcial ou totalmente) e, por isso, todos os fluxos que utilizem esse hub devem ser realocados para outro hub, ocasionando um aumento de custo indesejado. Levando em consideração o fato de hubs consolidarem e concentrarem os fluxos de seus clientes, interdições em hubs tendem a gerar um maior impacto no sistema de distribuição. Na prática, as razões para tais acontecimentos são várias, como por exemplo falhas operacionais, desastres naturais ou até mesmo ataques intencionais.

Modelos que visam identificar em uma rede de abastecimento qual o subconjunto de facilidades que, quando interditas, causam maior impacto no custo de abastecimento vêm ganhando importância na literatura [Israeli e Wood (2002); Salmeron *et al.* (2009); Church *et al.* (2004); Altner *et al.* (2010)]. A descoberta de tal subconjunto mostra ao planejador do sistema quais as facilidades nas quais se deveria tomar decisões preventivas a fim de evitar eventuais interdições.

Church *et al.* (2004) propuseram dois problemas de grande importância para área de interdição em redes de abastecimento: o RIM - “*r-interdiction median problem*” (problema da mediana com *r*-interdições) e o RIC “*r-interdiction covering problem*” (problema de cobertura com *r*-interdições). Ambos os problemas consideram clientes sendo atendidos por facilidades, que podem vir a ser interditas e, desta forma, sendo possível identificar as instalações mais importantes da rede. A diferença entre os dois problemas é que no RIM cada cliente é atendido pela facilidade mais perto, enquanto no RIC os clientes são atendidos através do raio de cobertura.

Lei (2013) foi o primeiro a abordar o tema de interdição em uma rede com utilização de hubs, propondo o HIM - “*hub interdiction median problem*” (problema da mediana com interdição em hubs - PMIH). O problema considera uma rede de transporte composta de diversos hubs e

diversos pares origem e destino, bem como os fluxos a serem transportados entre estes pares. Os fluxos devem ser transportados utilizando um hub ou um par destes de acordo com o menor custo de transporte. Quando um hub é interditado, os fluxos que de alguma forma utilizavam este hub passam a utilizar algum hub não interditado ou par destes mais barato. A consequência natural da interdição em hubs é o aumento no custo total de transporte. Neste contexto, o PMIH visa identificar o conjunto de  $r$  hubs que, se interditados, geram o maior impacto no custo do serviço prestado pelo sistema.

Para resolver o PMIH, Lei (2013) propôs um modelo de programação linear inteira (PLI), onde diversos resultados associados a instâncias de diversos tamanhos foram apresentados. O modelo prévio não foi comparado a nenhum outro, nem mesmo a um modelo de enumeração completa de todas as soluções viáveis, chamado aqui neste trabalho de Enumeração Completa (EC).

Neste artigo, são apresentadas duas contribuições para o PMIH: a primeira delas é comparar o modelo proposto por Lei (2013) com a EC, a fim de verificar quais dos dois métodos exatos apresenta melhores resultados. A segunda contribuição é a proposta de uma heurística gulosa que identifica iterativamente os  $r$  hubs de acordo com o maior impacto no custo total de transporte. Para atingir as duas contribuições prévias, diversos resultados computacionais são apresentados onde é possível constatar que em todas as instâncias testadas a EC necessita de um tempo computacional muito menor do que o modelo da literatura e a heurística aqui proposta consegue obter a solução ótima ou uma solução muito próxima desta com um tempo computacional significativamente pequeno.

## 2. Revisão de Literatura

O tema interdição em redes foi abordado pela primeira vez em aplicações militares durante tempos de guerra [McMasters e Mustin (1970) e Ghare *et al.* (1971)]. Por exemplo, considerando uma rede de abastecimento de suprimentos na guerra, o objetivo de modelos propostos na época era interditar links com o objetivo de interromper a movimentação dos inimigos e a chegada destes suprimentos, deixando-os sem comida, remédio e munição para o combate. Em tempos atuais, com o aumento de ameaças terroristas ao redor do mundo, a atenção está voltada para a identificação das chamadas “infraestruturas críticas”. Estas infraestruturas críticas são definidas como infraestruturas que, se perdidas, causam grande impacto na rede de distribuição ou transporte em que se aplica, podendo causar a interrupção de fornecimento de suprimentos básicos (comida, energia ou medicamentos), serviços (polícia, bombeiros ou ambulâncias), ou simplesmente do atendimento de determinado sistema de distribuição.

Outros modelos visando à interrupção de links em uma rede de transporte ou abastecimento de suprimentos foram estudadas ao decorrer dos anos, podendo citar Israeli e Wood (2002)

e Bayrak e Bailey (2008) que se aprofundaram no problema denominado "*shortest path network interdiction*" (interdição em rede do caminho mínimo). Este problema tem como finalidade maximizar o comprimento do caminho mínimo s-t através de interrupções nas ligações da rede de distribuição.

Church *et al.* (2004) foram os primeiros a propor um problema com interdições em facilidades em uma rede de serviços, com dois modelos capazes de identificar as facilidades de maior importância na distribuição de fluxo. O RIMP (*r-interdiction median problem*) procura identificar os locais de distribuição de suprimentos (já existentes) que, se removidos, diminuiriam ao máximo a eficiência do sistema como um todo. Para cada facilidade interdita, a demanda previamente atendida por esta facilidade deve ser realocada para uma facilidade mais longe, aumentando a soma das distâncias ponderadas. Já o RICP (*r-interdiction covering problem*) visa aumentar ao máximo o prejuízo dado pelas interdições no sistema em facilidades que cobrem certas demandas que para elas são alocadas. Um bom exemplo para o problema de cobertura são instalações do corpo de bombeiros, que atendem demandas dentro de uma área preestabelecida. Ambos os modelos RIMP e RICP têm como objetivo identificar um subgrupo de facilidades que, se perdidas, levam à interrupção máxima do atendimento do sistema. Com este conceito, serão encontradas as facilidades mais importantes (chamadas críticas) para o funcionamento eficiente do serviço.

A partir do trabalho proposto por Church *et al.* (2004) e do contexto histórico do começo dos anos 2000 (o atentado de 11 de Setembro que vitimou várias pessoas nos Estados Unidos e a crescente ameaça de ataques terroristas), a linha de pesquisa de interdições em facilidades passou a ser estudada com maior frequência, aumentando o número de artigos neste quesito. Losada *et al.* (2012) propuseram um problema estocástico baseado no RIMP, considerando que o estado operacional das instalações interditas é incerto e baseado na intensidade da interdição. Aksen *et al.* (2010) e Aksen *et al.* (2014) também trabalharam o problema proposto em 2004, mas com variações considerando o RIMP tendo orçamento limitado, mas capacidade extensível e facilidades com capacidade, por exemplo. Em um trabalho mais atual, Zhang *et al.* (2016) abordaram o problema da mediana com interdição parcial aplicado a sistemas de abastecimento com múltiplas origens. Para uma discussão ainda mais detalhada a respeito de artigos, referências e modelos relacionados ao tema, ver Snyder *et al.* (2012).

Lei (2013) abriu um novo campo de estudo relativo a interdição em hubs propondo o PMIH e, a partir dele, vários artigos surgiram para aplicar estes conceitos com abordagens diferentes. Parvaresh *et al.* (2013) formularam o problema da mediana em p-hubs com alocação múltipla sob interrupções intencionais como um modelo em dois níveis. Neste problema a empresa deve localizar um número p de hubs sabendo que, depois da localização, terão interdições que visam aumentar o custo deste sistema. Neste artigo foram utilizados dois algoritmos baseados em arrefecimento simulado para resolução do problema. O mesmo problema

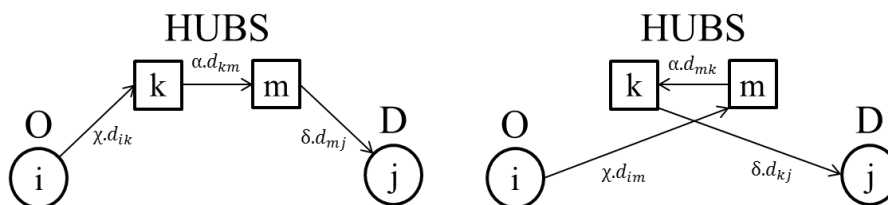
é, também, abordado em Parvaresh *et al.* (2014) e resolvido através de duas metaheurísticas multi-objetivas baseadas em arrefecimento simulado e busca tabu. Azizi *et al.* (2016) apresentaram uma meta-heurística para o problema de localização, minimizando o aumento de custo decorrente da interdição de um único hub em um sistema *hub-and-spoke*. Mohammadi *et al.* (2016) trabalham o problema de localização de hubs com a incerteza de interdição, podendo também considerar interdições totais e parciais em hubs. Além disso, é proposto um novo algoritmo de meta-heurística híbrida para o problema. Chaharsooghi *et al.* (2017) também tratam um problema de localização de hubs com múltiplas alocações sujeito a interdições onde é apresentado um modelo de programação estocástica e uma meta-heurística.

Apesar de existirem as abordagens anteriormente citadas para problemas envolvendo interdições em redes *hub-and-spoke*, Lei (2013) foi o único pesquisador a abordar o PMIH e apresentar uma formulação para a sua resolução. Portanto, não há na literatura outro modelo para comparação. Assim, neste trabalho, serão apresentadas as comparações do modelo aqui proposto com o modelo original e com um método enumerativo (EC), sendo este último mais eficiente, em termos de tempo computacional, com relação ao proposto.

### 3. Descrição do PMIH

O PMIH considera um sistema de transporte composto de  $n$  pontos, incluindo um conjunto  $H$  composto de  $p$  hubs já localizados e um conjunto  $J$  composto pelos demais  $n - p$  pontos. Cada par de pontos  $(i, j) \in J \times J$  possui uma demanda  $w_{ij}$ , que deve ser transportada do ponto  $i$  para o ponto  $j$ . Cada uma destas demandas é transportada utilizando-se o hub ou o par de hubs mais barato. O custo de um par de pontos origem e destino  $(i, j) \in J \times J$  ser atendido pelo par de hubs  $(k, m) \in H \times H$  é denotado por  $d_{ijkm}$  e é dado por

$$d_{ijkm} = \min\{\chi \cdot d_{ik} + \alpha \cdot d_{km} + \delta \cdot d_{mj}, \chi \cdot d_{im} + \alpha \cdot d_{mk} + \delta \cdot d_{kj}\}, \quad (1)$$

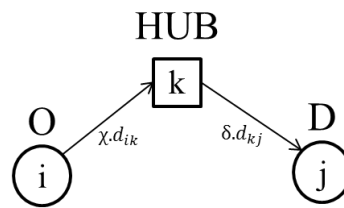


**Figura 1:** Grafo representando a utilização de hubs e suas possíveis rotas.

onde a matriz  $d$  é composta pelas distâncias entre os pontos,  $\alpha$ ,  $\chi$  e  $\delta$  são parâmetros de entrada entre 0 e 1 representando respectivamente o fator de desconto entre hubs, o fator de distribuição e o fator de recebimento. A Figura 1 ilustra as duas possíveis rotas de  $i$  para  $j$  utilizando o par de

hubs  $(k, m)$ . Na rota da esquerda, tem-se o caminho  $i \rightarrow m \rightarrow k \rightarrow j$ , com custo  $\chi \cdot d_{ik} + \alpha \cdot d_{km} + \delta \cdot d_{mj}$ . Já na rota da direita, tem-se o caminho  $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$  e à sua direita a rota  $\chi \cdot d_{im} + \alpha \cdot d_{mk} + \delta \cdot d_{kj}$ . O custo  $d_{ijkm}$  é dado pelo mínimo dos dois custos prévios. Quando  $k = m$ , tem-se o custo de transporte utilizando-se um único hub, como mostrado na Figura 2. Neste caso, o custo é dado por (2).

$$d_{ijkk} = \chi \cdot d_{ik} + \delta \cdot d_{kj} \quad (2)$$



**Figura 2:** Grafo representando a utilização de um único hub para atendimento de um par de clientes.

Para cada par  $(i, j) \in J \times J$ , pode-se encontrar o menor custo de atendimento deste por algum par de hubs  $(k, m) \in H \times H$  denotado aqui por  $d_{ij}^*$  através da equação:

$$d_{ij}^* = \min\{d_{ijkm} | (k, m) \in H \times H\}$$

O custo total de atendimento do sistema  $CT$  é então dado por:

$$CT = \sum_{(i,j) \in J \times J} w_{ij} d_{ij}^*$$

Existe a possibilidade de um hub ser interditado e, neste caso, todos os pares  $(i, j) \in J \times J$  que eram atendidos por este de alguma forma passam a ser atendidos por outro hub ou par de hubs não interditado mais barato, aumentando o custo  $CT$ . O objetivo do PMIH é maximizar o aumento deste custo em virtude da interdição de  $r$  hubs.

#### 4. Formulação da literatura

Neste tópico é apresentada a formulação de Programação Linear Inteira (PLI) para o PMIH proposta por Lei (2013). Para esta formulação, considere a notação já definida na seção anterior. Considere ainda o seguinte conjunto  $C_{ijkm}$ :

$$C_{ijkm} = \{(q, s) \mid d_{ijqs} < d_{ijkm} \text{ ou } d_{ijqs} = d_{ijkm} \text{ e } (q < k \text{ ou } q = k \text{ e } s < m)\} \quad (3)$$

(4)

O conjunto  $C_{ijkm}$  compreende todos os pares de hubs que geram rotas com menor custo de atendimento em comparação com a utilização da rota  $i - k - m - j$ . Também fazem parte deste conjunto os pares  $(q, s) \in H \times H$  que apresentam o mesmo valor de custo de atendimento do par  $(k, m)$ , porém tenham um índice menor, tanto no primeiro como no segundo hub. Este conjunto é utilizado na formulação no conjunto de restrições que garantem que todo par de clientes deve ser atendido pelo par de hubs ou único não interdito mais barato.

As variáveis de decisão incluem o grupo de variáveis relativo as interdições e o grupo relativo a designação de pares de clientes a pares de hubs descritas como seguem:

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{se o hub } k \text{ não está interdito} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$x_{ijkm}$  = A fração de fluxo da origem  $i$  para o destino  $j$  roteado através dos hubs intermediários  $k$  e  $m$ .

A formulação para o modelo da literatura é a que segue:

$$\max \quad CT = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{k \in H} \sum_{m \in H} d_{ijkm} \cdot x_{ijkm} \quad (5)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k \in H} \sum_{m \in H} x_{ijkm} = 1 \quad \forall i, j \in J \quad (6)$$

$$x_{ijkm} \leq y_k \quad \forall k, m \in H \quad (7)$$

$$x_{ijkm} \leq y_m \quad \forall k, m \in H \quad (8)$$

$$\sum_k y_k = p - r \quad (9)$$

$$\sum_{(q,s) \in C_{ijkm}} x_{ijqs} + x_{ijkm} \geq y_k + y_m - 1 \quad \forall i, j \in J; k, m \in H \quad (10)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in H \quad (11)$$

$$0 \leq x_{ijkm} \leq 1 \quad \forall i, j \in J; k, m \in H \quad (12)$$

A função objetivo (5) maximiza o custo total de transporte após as interdições. As restrições (6) indicam que cada par de clientes  $(i, j)$  pode ser ligado somente a um par de hubs. As restrições (7) e (8) garantem que cada par de clientes  $(i, j)$  só pode ser ligado a hubs que



permaneçam disponíveis após as interdições. A restrição (9) obriga que  $p-r$  hubs se mantenham abertos, o que é equivalente a dizer que  $r$  hubs, dos  $p$  existentes, devem ser interditados. Por fim, as restrições (10) garantem que, se ambos os hubs  $k$  e  $m$  estiverem disponíveis ( $y_k + y_m - 1 = 1$ ) e se nenhuma rota alternativa tem um custo menor ( $\sum_{(q,s) \in C_{ijkm}} x_{ijqs} = 0$ ), então a rota  $i-k-m-j$  deve ser escolhida ( $x_{ijkm} = 1$ ).

## 5. Enumeração Completa (EC)

Neste tópico é apresentado o pseudocódigo da EC que será comparada em termos de tempo computacional de resolução com o modelo da literatura e com a heurística aqui proposta. Para entendimento do algoritmo, as notações a seguir são necessárias. Seja  $\mathbf{F}$  o conjunto de estratégias possíveis de interdição, não necessariamente com  $r$  interdições. Matematicamente,  $\mathbf{F} = \{F \subseteq H \mid |F| \leq r\}$ . Para cada  $F \in \mathbf{F}$  define-se  $Custo(F)$  como sendo o custo total de atendimento de todos os pares de clientes  $(i, j) \in J \times J$  dada a estratégia  $F$ . Por exemplo, se  $F = \{1, 4, 8\}$ ,  $Custo(F)$  será o menor custo de atendimento de todos os pares de clientes de uma dada rede após as interdições dos hubs 1, 4 e 8. Este valor pode ser facilmente calculado percorrendo todos os pares de clientes  $(i, j) \in J \times J$ , onde é encontrado o par de hubs mais barato em relação a este par de clientes que não considera nenhum hub interditado de acordo com  $F$ , acumulando o seu custo de atendimento. Ao final,  $Custo(F)$  recebe este custo total acumulado. Os passos da EC estão no Algoritmo 1.

---

### Algoritmo 1: EC

---

**Entrada:** Instância  $(J, H, r, d, \alpha, \chi, \delta)$  para o PMIH

**Saída:** Estratégia ótima de interdição  $F^*$  com custo  $Custo^*$ .

- 1: **Função** Enumera( $r, F$ , índice)
- 2:     Se  $|F| = r$  então
- 3:         Se  $Custo(F) > Custo^*$  então
- 4:              $Custo^* = Custo(F)$
- 5:              $F^* \leftarrow F$
- 6:     Fim se
- 7:     Senão
- 8:         para  $i \leftarrow$  índice + 1 até  $p$  faça
- 9:             Se  $i \notin F$  então
- 10:                  $F = F \cup \{i\}$
- 11:                 Enumera( $r, F, i$ )
- 12:                  $F = F - \{i\}$

13: Fim se

14: Fim Para

15: Fim Se

16: **Fim Função**17:  $F^* \leftarrow \emptyset$ 18:  $Custo^* = 0$ 19:  $F \leftarrow \emptyset$ 

20: índice = 0

21: Enumera( $r$ ,  $F$ , índice)22: Retorna  $F^*$  e  $Custo^*$ 

O algoritmo começa nos passos 17-20, onde os valores iniciais de algumas variáveis são definidos. Mais especificamente, a estratégia ótima ainda é desconhecida (passo 17) e o custo ótimo se inicia com valor zero (passo 18). Os passos 19 e 20 definem as variáveis  $F$  e índice. A variável  $F$  guarda a estratégia corrente enquanto índice guarda o último índice visitado pelo algoritmo de enumeração. O algoritmo possui ainda uma função denominada Enumera que verifica se a solução ótima deve ser atualizada sempre que  $F$  possui  $r$  hubs (passos 2-7). Quando  $F$  possui menos do que  $r$  hubs, mais um hub é adicionado a  $F$  (passo 10) e, em seguida, função Enumera é novamente chamada, o que caracteriza a função como recursiva. Esta função é chamada pela primeira vez no passo 21. Ao final do passo prévio, todas as estratégias terão sido percorridas. Consequentemente, a solução retornada no passo final (passo 22) representa a solução ótima do problema.

## 6. Heurística Gulosa

Neste tópico é apresentado o pseudocódigo para a heurística gulosa proposta neste trabalho. Nesta heurística, primeiramente, são encontrados os dois hubs que, se interditados, obtêm o maior custo de atendimento possível de todos os pares de clientes acumulados. Após isso, se  $r > 2$ , o procedimento prossegue como detalhado a frente.

O algoritmo da heurística também considera a função  $Custo(F)$ . Além disso, a seguinte notação é necessária.  $F_h^*$  representa a estratégia de interdição gerada pela heurística, que possui custo denotado por  $Custo\_h^*$ . Os passos da heurística se encontram no Algoritmo 2.

---

 Algoritmo 2: Heurística Gulosa
 

---

```

1: Custo_h* ← 0
2: F_h* ← ∅
3: para k1 ← 1 até p - 1 faça
4:   para k2 ← k1 + 1 até p faça
5:     F ← { k1, k2 }
6:     se Custo(F) > Custo_h * então
7:       Custo_h* ← Custo(F)
8:       F_h* ← F
9:     fim se
10:   fim para
11: fim para
12: se r > 2 então
13:   enquanto |F_h*| < r faça
14:     Interdita ← ∅
15:     para k1 ← 1 até p faça
16:       se k1 ∉ F* então
17:         F ← F* ∪ k1
18:         se Custo(F) > Custo_h * então
19:           Custo_h* ← Custo(F)
20:           Interdita ← k1
21:       fim se
22:     fim se
23:   fim para
24:   F_h* ← F_h* ∪ Interdita
25: fim enquanto
26: fim se
  
```

---

Nos passos 1-11 são percorridas todas as possibilidades de interdições em somente dois hubs, identificando o par que causa maior impacto no custo de atendimento. Este par é guardado em  $F_h^*$ , enquanto o custo associado é guardado em  $Custo\_h^*$ . Uma vez determinados o maior custo e a melhor estratégia, se  $r > 2$ , o algoritmo continua em sua segunda parte (passos 12-26). Nesta parte, enquanto  $|F_h^*|$  for diferente de  $r$ , um hub é adicionado a  $F^*$  iterativamente de acordo com o maior impacto no custo de atendimento. A cada hub adicionado na estratégia será

incrementado o custo referente àquela estratégia, visto que qualquer interdição aumenta o custo de, pelo menos, um par de cliente. No passo 18 é comparado o custo de atendimento da interdição atual com a melhor já conhecida e, se a primeira for melhor, no passo 19 é atualizado o custo  $Custo\_h^*$ . Ao final de cada iteração (passo 24),  $F_h^*$  é também atualizado.

## 7. Resultados Computacionais

Neste tópico são apresentados os resultados computacionais da heurística proposta. Os testes foram realizados utilizando como base de dados o conjunto de instâncias AP, proposto por Ernst e Krishnamoorthy (1996). Este conjunto de instâncias se baseia nos correios da Austrália (*Australian Post - AP*) e conta com 200 nós originalmente, mas possibilita a geração de instâncias menores a partir da agregação de alguns nós, conforme aqui realizado para gerar instâncias com 25, 40, 50 e 75 pontos. Para todos os testes realizados foram utilizados  $\chi = 3$ ,  $\alpha = 0,75$  e  $\delta = 2$ , conforme proposto originalmente por Ernst e Krishnamoorthy (1996). Os valores dos fluxos (demandas) entre origens e destinos, bem como custos por arco não são simétricos.

Para gerar instâncias específicas para o PMIH, são adotadas as seguintes características: os  $p$  hubs já localizados no sistema (conjunto  $H$ ) foram obtidos através da resolução do problema da  $p$ -mediana em hubs, proposto por Campbell (1994). Os demais  $n - p$  pontos formam o conjunto  $J$ . Os parâmetros das instâncias variam da seguinte maneira:  $n \in \{25, 40, 50, 75\}$ ,  $p \in \{5, 10, 20, 30\}$  e  $r \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Foi utilizado um computador com processador Intel Core i7-4790 3.60GHz CPU e 16 GB de memória RAM tendo o Windows 8.1 como sistema operacional, utilizando CPLEX 12.5.1 e linguagem de programação C++ pela IDE Visual Studio 2015. Para os testes foi utilizado uma única thread e os demais parâmetros não foram alterados.

Diversos resultados computacionais são apresentados neste trabalho. Primeiramente é comparado o tempo computacional do modelo da literatura, proposto por Lei (2013), com a EC que percorre todas as soluções possíveis de interdição, calcula seus custos e guarda a melhor delas. O modelo da literatura foi implementado na mesma máquina dos outros modelos e todos os testes foram executados em conjunto, possibilitando variar as instâncias e equiparar possíveis desníveis de tecnologia nas máquinas trabalhadas. As comparações de tempo computacional entre os dois modelos são apresentadas nas Tabelas 1 e 2. Os tempos expostos como “0,0000” representam tempos computacionais abaixo de  $10^{-4}$ s. Os testes foram abortados para instâncias que necessitaram mais do que 36000 segundos de execução.

**Tabela 1:** Comparação entre os tempos da EC e do modelo da literatura para instâncias pequenas ( $n = 25$  e  $n = 40$ )

Características da Instância			Tempo Computacional (s)	
$n$	$p$	$r$	EC	Literatura
25	5	2	0,0000	3,531
	5	3	0,0000	3,563
	5	4	0,0000	1,156
40	10	2	0,0000	373,734
	10	3	0,0000	412,797
	10	4	0,0156	564,766
	10	5	0,0313	480,094
	10	6	0,0313	430,063
	10	7	0,0313	316,906
	10	8	0,0000	140,078
	10	9	0,0000	25,922

Observando as Tabelas 1 e 2 pode-se notar que a EC é extremamente mais eficiente do que o modelo adotado pela literatura em todas as instâncias, especialmente nas instâncias menores em que o primeiro método necessita percorrer um número consideravelmente pequeno de estratégias, tornando o modelo muito rápido.

**Tabela 2:** Comparação entre os tempos da EC e do modelo da literatura para instâncias maiores ( $n = 50$  e  $n = 75$ )

Características da Instância			Tempo Computacional (s)		Características da Instância			Tempo Computacional (s)	
$n$	$p$	$r$	EC	Literatura	$n$	$p$	$r$	EC	Literatura
50	10	2	0,0156	859,11	75	10	2	0,0156	6.058,69
	10	3	0,0000	1.182,27		10	3	0,0156	5.077,88
	10	4	0,0156	1.251,02		10	4	0,0469	6.440,36
	10	5	0,0156	1.174,16		10	5	0,0625	9.540,92
	10	6	0,0313	736,19		10	6	0,0625	7.046,55
	10	7	0,0313	693,72		10	7	0,0469	3.605,16
	10	8	0,0000	367,47		10	8	0,0313	1.846,91
	10	9	0,0000	41,70		10	9	0,0000	154,50
50	20	2	0,0000	10.008,94	75	20	2	0,0156	31.678,63
	20	3	0,0313	15.080,80		20	3	0,0938	34.796,31
	20	4	0,2031	19.537,94		20	4	0,4844	> 36000
	20	5	0,7813	25.546,16		20	5	1,9219	> 36000
	20	6	2,4844	27.551,73		20	6	6,0156	> 36000
	20	7	6,1719	31.462,64		20	7	14,8594	> 36000
	20	8	12,3438	> 36000		20	8	30,0469	> 36000
	20	9	20,1250	> 36000		20	9	48,1719	> 36000
50	30	2	0,0156	> 36000	75	30	2	0,0313	> 36000

30	3	0,1250	> 36000	30	3	0,3125	> 36000
30	4	1,0781	> 36000	30	4	2,4531	> 36000
30	5	6,4219	> 36000	30	5	14,6094	> 36000
30	6	30,6563	> 36000	30	6	70,1250	> 36000
30	7	122,1406	> 36000	30	7	276,0625	> 36000
30	8	412,6719	> 36000	30	8	920,3750	> 36000
30	9	1.139,7031	> 36000	30	9	2.584,6250	> 36000
30	10	2.770,4688	> 36000	30	10	6.374,0156	> 36000

Foi utilizado um limite de tempo computacional para as instâncias apresentadas de 36.000s, como se pode notar nos tempos simbolizados como > 36000s. Isso significa que a referida instância ultrapassou este limite. Instâncias com  $p = 10$  e um número de interdições alto (por exemplo,  $r = 8$  ou  $r = 9$ ) tendem a demandar um tempo de resolução menor com relação a números de interdições menores nesta quantidade de  $p$ , pois o número de hubs disponíveis diminui drasticamente, tendo poucas estratégias de atendimento viáveis. Outro ponto importante a ser destacado é que, apesar do método EC ter resolvido todas as instâncias, em algumas o método necessitou um tempo computacional elevado, justificando a implementação de uma heurística para o problema.

Uma vez definido que a EC é mais rápida do que o modelo adotado pela literatura, a próxima comparação a ser feita é da heurística proposta neste trabalho com a EC. Tal comparação é feita nas Tabelas 3 e 4. Nelas são adotados os mesmos números de nós  $n$ , números de hubs  $p$  e número de interdições  $r$ . Além da comparação do tempo computacional, há também a comparação dos custos obtidos por cada modelo, podendo definir assim a diferença relativa (GAP) entre as duas soluções.

**Tabela 3:** Comparação entre os tempos e custos da EC e da heurística para instâncias pequenas ( $n = 25$  e  $n = 40$ )

Característica da Instância			Tempo Computacional		Custos do Modelo		
$n$	$p$	$r$	EC	Heurística	EC	Heurística	GAP
25	5	2	0,000	0,000	2.822,03	2.822,03	0,00%
	5	3	0,000	0,000	3.913,60	3.913,60	0,00%
	5	4	0,000	0,000	6.575,80	6.246,56	5,01%
40	10	2	0,000	0,000	5.446,97	5.446,97	0,00%
	10	3	0,000	0,000	6.973,60	6.973,60	0,00%
	10	4	0,016	0,000	8.462,05	8.462,05	0,00%
	10	5	0,031	0,000	10.887,77	10.887,77	0,00%
	10	6	0,031	0,016	13.179,40	13.179,40	0,00%
	10	7	0,031	0,000	15.533,42	15.533,42	0,00%
	10	8	0,000	0,000	20.657,99	20.657,99	0,00%
10	9	0,000	0,000	27.521,68	27.521,68	0,00%	

**Tabela 4:** Comparação entre os tempos e custos da EC e da heurística para instâncias maiores  
( $n = 50$  e  $n = 75$ )

Característica da Instância			Tempo Computacional		Custos do Modelo		
$n$	$p$	$r$	EC	Heurística	EC	Heurística	GAP
50	10	2	0,016	0,000	10.304,03	10.304,03	0,00%
	10	3	0,000	0,016	12.351,56	12.351,56	0,00%
	10	4	0,016	0,000	15.587,21	15.587,21	0,00%
	10	5	0,016	0,000	18.455,94	18.455,94	0,00%
	10	6	0,031	0,000	24.852,33	24.852,33	0,00%
	10	7	0,031	0,000	28.040,32	28.040,32	0,00%
	10	8	0,000	0,000	33.996,27	33.996,27	0,00%
	10	9	0,000	0,016	46.083,03	46.083,03	0,00%
50	20	2	0,000	0,000	5.251,23	5.251,23	0,00%
	20	3	0,031	0,000	5.925,03	5.902,43	0,38%
	20	4	0,203	0,000	6.703,78	6.703,78	0,00%
	20	5	0,781	0,016	7.878,46	7.878,46	0,00%
	20	6	2,484	0,016	9.181,43	9.181,43	0,00%
	20	7	6,172	0,016	10.030,41	10.030,41	0,00%
	20	8	12,344	0,016	11.214,54	11.214,54	0,00%
	20	9	20,125	0,016	12.923,46	12.923,46	0,00%
	20	10	26,719	0,031	15.289,07	15.289,07	0,00%
	50	30	2	0,016	0,016	4.472,37	4.472,37
30		3	0,125	0,016	5.003,21	5.003,21	0,00%
30		4	1,078	0,031	5.406,22	5.406,22	0,00%
30		5	6,422	0,016	5.903,93	5.903,93	0,00%
30		6	30,656	0,016	6.402,18	6.402,18	0,00%
30		7	122,141	0,031	6.885,67	6.885,67	0,00%
30		8	412,672	0,031	7.204,80	7.204,80	0,00%
30		9	1.139,703	0,047	7.536,96	7.512,96	0,32%
30		10	2.770,469	0,063	8.175,08	7.783,54	4,79%
75		10	2	0,016	0,000	17.852,75	17.852,75
	10	3	0,016	0,000	20.224,82	20.224,82	0,00%
	10	4	0,047	0,016	24.858,10	24.858,10	0,00%
	10	5	0,063	0,000	28.769,62	28.769,62	0,00%
	10	6	0,063	0,016	36.132,83	36.132,83	0,00%
	10	7	0,047	0,000	53.077,31	53.077,31	0,00%
	10	8	0,031	0,016	65.981,38	65.981,38	0,00%
	10	9	0,000	0,016	87.391,78	87.391,78	0,00%
75	20	2	0,016	0,016	11.616,50	11.616,50	0,00%
	20	3	0,094	0,016	12.587,78	12.587,78	0,00%

20	4	0,484	0,016	13.676,56	13.494,94	1,33%
20	5	1,922	0,031	14.956,20	14.387,40	3,80%
20	6	6,016	0,031	16.336,68	16.336,68	0,00%
20	7	14,859	0,016	17.451,13	17.451,13	0,00%
20	8	30,047	0,031	19.708,59	19.708,59	0,00%
20	9	48,172	0,031	21.396,81	21.396,81	0,00%
20	10	64,250	0,047	23.661,73	23.661,73	0,00%
30	2	0,031	0,031	9.177,28	9.177,28	0,00%
30	3	0,313	0,031	10.188,12	9.924,62	2,59%
30	4	2,453	0,031	10.934,40	10.801,90	1,21%
30	5	14,609	0,047	12.115,01	12.115,01	0,00%
75	30	70,125	0,047	12.980,63	12.980,63	0,00%
30	7	276,063	0,047	13.720,51	13.720,51	0,00%
30	8	920,375	0,063	14.884,04	14.617,55	1,79%
30	9	2.584,625	0,063	15.806,57	15.370,38	2,76%
30	10	6.374,016	0,078	16.980,74	16.504,53	2,80%

Analisando os tempos computacionais demandados por ambos os modelos expostos nas Tabelas 3 e 4, em apenas 3 das 63 instâncias, a heurística gulosa proposta apresentou um tempo computacional superior à EC. Nestas três situações a diferença foi de menos de 0,02s, um valor extremamente pequeno, diferente das instâncias maiores em que a heurística consome um tempo computacional abaixo de 0,1s enquanto o método EC consome entre 2000 e 6000s. As Tabelas também mostram que em apenas 11 instâncias a heurística obteve um GAP superior a 0%, sendo o maior deles de 5,01%, um valor relativamente pequeno considerando o ganho em termos de tempo computacional gasto por ambos os modelos.

## 8. Conclusão

O presente trabalho estudou o PMIH, fazendo um estudo do método exato existente e apresentando uma heurística gulosa para o problema. O método exato existente foi comparado a um método enumerativo que percorre todas as soluções viáveis, onde este último se mostrou mais rápido em todas as instâncias testadas. A heurística aqui proposta foi então testada encontrando a solução ótima para boa parte das instâncias testadas em tempos computacionais extremamente baixos. Nas instâncias onde não foi encontrada a solução ótima, a diferença percentual relativa em relação a esta não passou dos 5,01%. Nas instâncias menores, a heurística demanda de um tempo computacional até equivalente à EC, mas conforme a instância aumenta a heurística mantém sua regularidade em termos de tempo computacional e o modelo enumerativo cresce exponencialmente. Este comportamento, levando em consideração que a EC



é superior ao modelo adotado pela literatura, consolida o fato de que a heurística proposta neste artigo é de extrema valia para o estudo do presente problema.

## 9. Referências Bibliográficas

AKSEN, D., PIYADE, N., e ARAS, N. 2010. The budget constrained r-interdiction median problem with capacity expansion. *Central European Journal of Operations Research*, 18(3):269–291.

AKSEN, D., ŞENGULAKCA, S., e ARAS, N. 2014. A bilevel partial interdiction problem with capacitated facilities and demand outsourcing. *Computers & Operations Research*, 41, 346–358.

ALTNER, D. S., ERGUN, O., e UHAN, N. A. 2010. The maximum flow network interdiction problem: Valid inequalities, integrality gaps, and approximability. *Operations Research Letters*, 38 (1), 33–38.

AZIZI, N., CHAUHAN, S., SALHI, S., e VIDYARTHI, N. 2016. The impact of hub failure in hub-and-spoke networks: Mathematical formulations and solution techniques. *Computers & Operations Research*, 65, 174–188.

BAYRAK, H. e BAILEY, M. D. 2008. Shortest path network interdiction with asymmetric information. *Networks*, 52(3), 133–140.

BUTTON, K. 2002. Debunking some common myths about airport hubs. *Journal of Air Transport Management*, 8(3), 177–188.

CAMPBELL, J. F. 1994. Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72(2), 387–405.

CHAHARSOOGHI, S., MOMAYEZI, F., e GHAFFARINASAB, N. 2017. An adaptive large neighborhood search heuristic for solving the reliable multiple allocation hub location problem under hub disruptions. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 8(2), 191–202.

CHURCH, R. L., SCAPARRA, M. P., e MIDDLETON, R. S. 2004. Identifying critical infrastructure: the median and covering facility interdiction problems. *Annals of the Association of American Geographers*, 94(3), 491–502.

ENGEVISTA, V. 20, n.1, p. 1-19, Fevereiro 2018.

Todos as informações e direitos sobre o presente artigo são de total e única responsabilidade do(s) autor(es).

ERNST, A. T. e KRISHNAMOORTHY, M. 1996. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location science*, 4(3), 139–154.

GHARE, P. M., MONTGOMERY, D. C., e TURNER, W. C. 1971. Optimal interdiction policy for a flow network. *Naval Research Logistics Quarterly*, 18(1), 37–45.

ISHFAQ, R. e SOX, C. R. 2011. Hub location–allocation in intermodal logistic networks. *European Journal of Operational Research*, 210(2), 213–230.

ISRAELI, E. e WOOD, R. K. 2002. Shortest-path network interdiction. *Networks*, 40(2), 97–111.

KIM, H. e O’KELLY, M. E. 2009. Reliable p-hub location problems in telecommunication networks. *Geographical Analysis*, 41(3), 283–306.

LEI, T. L. 2013. Identifying critical facilities in hub-and-spoke networks: A hub interdiction median problem. *Geographical Analysis*, 45(2), 105–122.

LOSADA, C., SCAPARRA, M. P., CHURCH, R. L., e DASKIN, M. S. 2012. The stochastic interdiction median problem with disruption intensity levels. *Annals of Operations Research*, 201(1), 345–365.

MCMASTERS, A. W. e MUSTIN, T. M. 1970. Optimal interdiction of a supply network. *Naval Research Logistics Quarterly*, 17(3), 261–268.

MOHAMMADI, M., TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R., SIADAT, A., e DANTAN, J.-Y. 2016. Design of a reliable logistics network with hub disruption under uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, 40 (9–10), 5621 – 5642.

PARVARESH, F., GOLPAYEGANY, S. A. H., HUSSEINI, S. M. M., e KARIMI, B. 2013. Solving the p-hub median problem under intentional disruptions using simulated annealing. *Networks and Spatial Economics*, 13(4), 445–470.

PARVARESH, F., HUSSEINI, S. M. M., GOLPAYEGANY, S. A. H., e KARIMI, B. 2014. Hub network design problem in the presence of disruptions. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 25(4), 755–774.

SALMERON, J., WOOD, K., e BALDICK, R. 2009. Worst-case interdiction analysis of large-scale electric power grids. *IEEE Transactions on power systems*, 24(1), 96–104.

SNYDER, L. V., ATAN, Z., PENG, P., RONG, Y., SCHMITT, A. J., e SINSOYSAL, B. 2012. Or/ms models for supply chain disruptions: a review. *IIE Transactions*, 48(2), 89–109.

ZHANG, X., ZHENG, Z., ZHANG, S., e DU, W. 2016. Partial interdiction median models for multisourcing supply systems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 84 (1), 165–181.