



Combinação das técnicas numéricas TPFA e IMPES para simulação do escoamento óleo-água em reservatório de petróleo

Use of the numerical techniques TPFA and IMPES for oil-water flow simulation in oil reservoir

Társis Baia Fortunato¹

Julio Cesar Sampaio Dutra²

Wellington Betencurte da Silva³

Resumo: A simulação de reservatório de petróleo é uma forma de diagnóstico do escoamento de fluido neste meio poroso. Porém, obter uma simulação coerente requer romper desafios de ordem numérica para a solução de modelos complexos. O modelo utilizado neste trabalho para a simulação é uma formulação conhecida como segregada, pois, a partir de uma manipulação algébrica, obtém-se uma Equação da Pressão e uma Equação da Saturação, que podem ser resolvidas de forma segregada. Estas duas equações são acopladas por um termo de velocidade. Este modelo é discretizado com o método dos Volumes Finitos, utilizando a técnica TFPA (*Two Point Flux Approximation*), e levando em consideração o esquema de solução IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*). Desta forma, esta metodologia é aplicada a um estudo de caso de domínio espacial heterogêneo, o que possibilita o teste de robustez do algoritmo, discretização e simulação numérica, bem como a viabilidade computacional. Os resultados para os campos de pressão e saturação se mostraram consistentes com a literatura.

Palavras-chave: Escoamentos em Meios Porosos, Métodos dos Volumes Finitos, Modelagem e Simulação.

¹ UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

² UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

³ UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

Abstract: Oil reservoir simulation is a way of diagnosing the fluid flow in this porous media. However, reaching a coherent simulation requires breaking challenges of computational and numerical order. In this work, the applied model is a formulation known in the literature as segregated, because, from an algebraic manipulation of the system equations, a Pressure equation and a Saturation equation are obtained. Both equations are coupled by a velocity term. This segregated model is then discretized by the method of Finite Volumes, using the technique Two Point Flux Approximation (TPFA). The result of this discretization is simulated using the IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation) solution scheme, where the pressure equation is solved implicitly and saturation equation solved explicitly. Thus, this methodology is applied to a case study of five spot well problem of heterogeneous spatial domain, which enables testing the algorithm robustness, discretization and numerical simulation and computational feasibility. The results for pressure and saturation fields were consistent with the literature.

Keywords: Flow in Porous Media, Finite Volume Method, Modeling and Simulation.

1. Introdução

A simulação de fluxo de petróleo e água em reservatórios de petróleo, que está inserida no contexto de escoamento de fluidos em meio poroso, apresenta um forte apelo econômico devido à produção de hidrocarbonetos. Estes compostos constituem importantes fontes de energia e matéria-prima para diversos materiais, como os polímeros (Cordazzo, 2006). A simulação é feita com a resolução de modelos matemáticos que, em sua grande maioria, não possuem solução analítica e são resolvidos por métodos numéricos (Maliska, 2004).

As indústrias petroleiras na década de cinquenta concentraram esforços em pesquisa para acoplar análise numérica destes modelos e os computadores da época. Naquela ocasião, nasceram os primeiros simuladores de reservatório de petróleo. A motivação destas pesquisas foi o planejamento de suas atividades com base na projeção da simulação (Cordazzo, 2006).

Dentre os diversos modelos, que são desenvolvidos para se adequar com mais eficácia à realidade do reservatório, a modelagem para escoamento imiscível bifásico, bastante difundida, é a de Peaceman (1977). Esta modelagem é feita com base no princípio de conservação da massa e momento, este último dado pela Lei de Darcy.

Nesta abordagem de Peaceman, é feita uma manipulação do conjunto de equações diferenciais obtidas a partir dos balanços, a fim de se obter um sistema de equações com características que possam ser exploradas numericamente durante o processo de simulação do escoamento. O IMPES (*Implicit in Pressure and Explicit in Saturation*) é um esquema de solução que explora tais características (Chen & Huan, 2006).

No esquema IMPES, a Equação da Pressão e da Saturação, que são acopladas por um termo de velocidade, são resolvidas de forma implícita e explícita, respectivamente. Esta técnica numérica tem como vantagem o baixo custo computacional devido à solução explícita de uma das equações do sistema. Porém, não é robusto para problemas de não linearidades fortes, sendo mais indicado em problemas incompressíveis e que não envolva mais de duas fases (Chen & Huan, 2006). Este esquema tem sido amplamente utilizado no contexto dos três principais métodos numéricos utilizados para a resolução das equações que descrevem o escoamento em reservatório que são eles: Diferenças Finitas, Volumes Finitos e Elementos Finitos (Kou & Sun, 2004; Rankin & Riviere, 2015; Mostaghimi *et. al.* 2012; Fernandes, 2013; Faruqui, 1998; Carvalho, 2005; Lie *et. al.* 2014).

Dentre estes três principais métodos, a característica de conservação das grandezas físicas pelo método de Volumes Finitos o torna atrativo. Este método possui inúmeras variações, algumas delas são caracterizadas pela disposição espacial e quantidade de volumes de controles utilizados no balanço da grandeza. Em simulações de reservatório de petróleo, uma técnica que faz os balanços apenas entre dois volumes discretos, é conhecida como *Two Point Flux Approximation* (TPFA) (Aarnes *et al.*, 2007). Esta técnica de Volumes Finitos, geralmente é

utilizada em malhas estruturadas. Porém, existem trabalhos que aplicam o TPFA em malhas não estruturadas, como Lie *et. al.* (2014).

Este trabalho aborda a simulação de escoamento em meio poroso heterogêneo, utilizando a técnica TPFA para discretizar o sistema de equações diferenciais parciais em malha estruturada e ortogonal. O esquema de solução adotado é o método IMPES, sendo que a simulação foi implementada no software MATLAB.

2. Modelo matemático

O modelo matemático, determinado por Peaceman (1977), que descreve o escoamento imiscível incompressível bifásico óleo-água, é mostrado nas Equações 1 e 2. A primeira é denominada equação da pressão, e segunda é chamada de equação da saturação. Nesta formulação, estas equações são acopladas por um termo de velocidade, dado na Equação 3. Este modelo é obtido a partir de um balanço de massa, em que o termo de velocidade é substituído pela Lei de Darcy, e obedece algumas hipóteses simplificadoras: o meio poroso está saturado; fluido e rocha incompressíveis; escoamento imiscível; escoamento isotérmico; os fluidos obedecem a Lei de Darcy.

$$\nabla \cdot (-\lambda_T K \nabla p) = Q \quad (1)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot f_w v + Q_w \quad (2)$$

$$\nabla \cdot v = Q \quad (3)$$

onde λ_T , é a mobilidade total, que é função das mobilidades das fases λ_i . O fluxo fracional da água é representado por f_w .

A relação entre essas variáveis é descrita nas Equações 4 a 6. O termo K é a permeabilidade absoluta, S_w a saturação da água, sendo que $S_w + S_n = 1$. Este trabalho adotou o subscrito w para a fase molhante (água), e n para não-molhante (óleo). Nas Equações 1 e 3, $Q = Q_w + Q_n$ que é a injeção total.

$$\lambda_i = k_{ri} / \mu_i \quad (4)$$

$$\lambda_T = \lambda_o + \lambda_w \quad (5)$$

$$f_w = \lambda_w / \lambda_T \quad (6)$$

As permeabilidades relativas, k_{ri} , e as saturações das fases são relacionadas através das seguintes expressões empíricas encontradas em Carvalho (2005), dadas nas Equações 7 e 8, em que S_{rn} e S_{rw} são as saturações residuais do óleo e água respectivamente.

$$k_{rw}(S_w) = \left(\frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{rn}} \right)^2 \quad (7)$$

$$k_{rn}(S_w) = \left(\frac{1 - S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{rn}} \right)^2 \quad (8)$$

Para completar o modelo, faz-se necessária a determinação de condições iniciais e de contorno. Em simulação de reservatório de petróleo, é comum definir o mesmo como uma curva fechada como mostra a Figura 1, com poços injetores e produtores sendo tratados como condições de contorno interna (Aziz, 1979). As fronteiras do domínio Ψ são denotadas por $\partial\Psi$, e as fronteiras internas por $\backslash\Psi\backslash$.

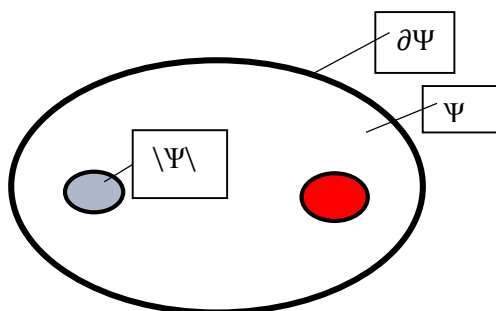


Imagem 1: Esquema geométrico do reservatório como uma curva fechada.

As condições de contorno para a equação da pressão são do tipo Dirichlet e Neumann, sendo respectivamente pressão especificada nos poços e taxa de produção nos poços. Para a equação da saturação, as Equações 9 e 10 determinam a condição inicial e de contorno.

$$S_w(x, 0) = S_w^0 \text{ em } \Psi \quad (9)$$

$$S_w(x, t) = S_w^i \text{ em } \backslash\Psi\backslash \quad (10)$$

3. Formulação numérica

No método numérico dos Volumes Finitos TPFAs, o domínio contínuo Ψ é transformado em domínio discreto composto por finitos volumes de controle denominados Ψ_i . A técnica TPFAs utiliza somente dois volumes de controle para determinação da incógnita centrada no volume de controle. Neste trabalho, a discretização do domínio é feita em volumes de controle estruturados e ortogonais.

3.1. Discretização da Equação da Pressão

Para obter um conjunto de equações discretas para o campo de pressão do reservatório denotado por Ψ , com células de malha denominadas Ψ_i , aplica-se o método de Volumes Finitos TPFAs na Equação 1. O resultado da discretização é mostrado na Equação 10. O termo de transmissibilidade, T_{ij} , é dado pela Equação 11.

$$\sum_i T_{ij}(p_i - p_j) = Q \quad (10)$$

$$T_{ij} = 2K \left(\frac{d_i}{\lambda_{T_i}} + \frac{d_j}{\lambda_{T_j}} \right) A_{ij} \quad (11)$$

onde A_{ij} é a área da interface entre a célula i e a célula $j = i+1$, d_i e d_j representam a dimensão da coordenada discretizada no respectivo volume de controle.

3.2. Equação da Saturação

Tomando a Equação da Saturação, integrando no volume de cada célula da malha e utilizando a regra trapezoidal (θ -rule) para a discretização temporal, obtém-se a discretização do campo de saturação:

$$\frac{\phi}{\Delta t} (S_w^{k+1} - S_w^k) = - \frac{1}{|\Psi_i|} \sum (\theta F_{ij}^{k+1} + (1 - \theta) F_{ij}^k) + Q_w \quad (11)$$

onde o termo $F_{ij}^{k+1} = \int_{\Psi_i} f_w v_i \cdot n_{ij} \partial s$

Como se injeta somente água, Aarnes *et al.* (2007) propuseram a relação $Q_w = Q^+ + f_w Q^-$, em que Q^+ indica o fluxo que é injetado, e intuitivamente Q^- é o fluxo que deixa o volume de controle. Inserindo esta relação na Equação 11, rearranjando os termos, e fazendo $\theta = 0$, obtém-se a Equação 12.

$$S_w^{k+1} = S_w^k + \frac{\Delta t}{\phi |\Psi_i|} (Q^+ - \sum_j F_{ij}^k + f_w Q^-) \quad (12)$$

4. Esquema de Solução

O método IMPES aplicado neste trabalho objetiva uma melhor estabilidade da solução, sem implicar em elevado custo computacional. Porém, uma desvantagem na utilização deste método na solução do modelo apresentado está na solução explícita da Equação de Saturação.

Esta solução é dependente do passo no tempo, de modo que uma escolha errada pode ocasionar erros numéricos e, até mesmo, não convergir. Em vista disto, deve ser estabelecida uma condição de estabilização. Aarnes *et al.* (2007) apresentaram uma condição de estabilização com dependência somente da velocidade. Desta forma, a condição é atualizada somente mediante a um novo campo de pressão.

A Equação 13 mostra a função deste passo no tempo para a solução da Equação de Saturação, onde se tem a expressão para o termo $f'_w(s) = \frac{1}{1 - S_{rw} - S_{rn}} \frac{\partial f}{\partial k_{rw}}$.

$$\Delta t \leq \frac{\phi|\Psi_i|}{\max(Q^+) - \sum_j \min(v_{ij}, 0)\max(f_w'(s))} \quad (13)$$

O conjunto de equações obtidas é implementado no *software* MATLAB. Durante a implementação, foi feito o uso de uma programação otimizada, visando diminuir o custo computacional, buscando explorar as vantagens do *software*, como a utilização de matrizes esparsas. A Figura 2 mostra o esquema geral da proposta numérica.

Nesta representação, os três primeiros passos são determinados em função do estudo de caso, em que se devem ser detalhadas as propriedades geológicas. Os demais passos são fixos e podem ser denominados como um *solver* (pacote computacional) de escoamento imiscível.

Para a simulação, utilizou-se uma malha com 300 células (volumes de controle) em cada eixo. O passo no tempo para o campo de pressão é fixado como 1 dia e o passo no tempo para a saturação é determinado pela Equação 13.

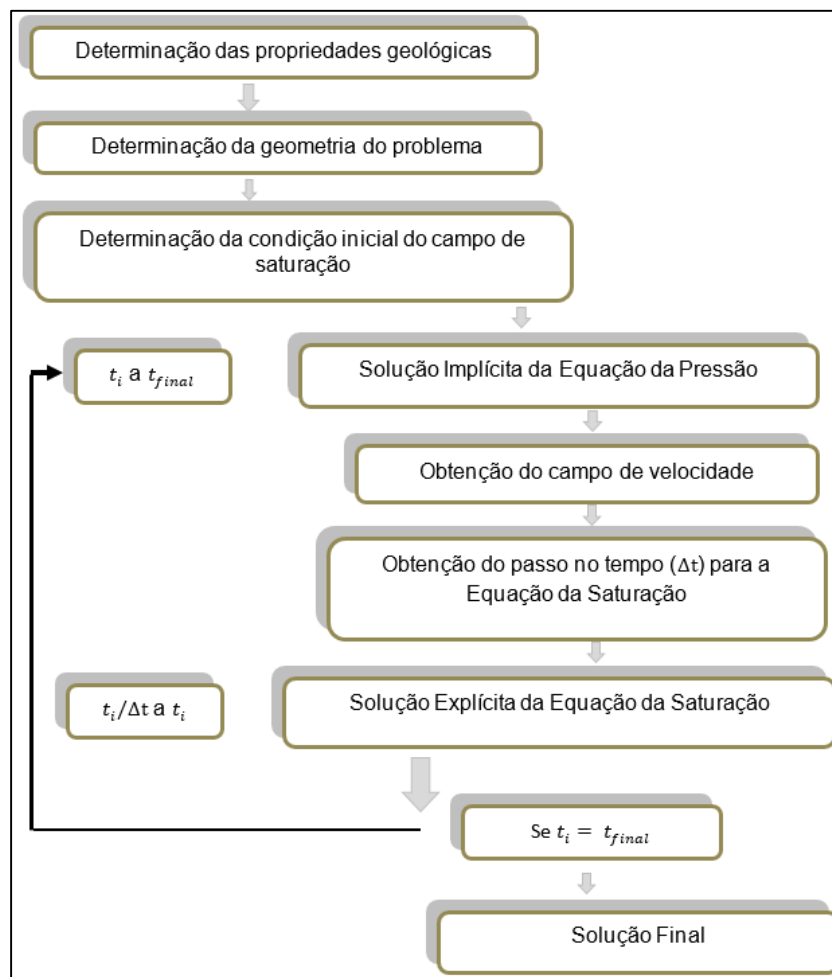


Imagem 2: Esquema numérico utilizando as técnicas TPFA e IMPES.

5. Estudo de caso

Como exemplo, considerou-se um domínio saturado de óleo, no qual é injetado água para se recuperar óleo. O escoamento óleo-água acontece em uma região com duas barras paralelas que possuem uma permeabilidade inferior ao restante do meio poroso. Cada barra tem o comprimento de 80 metros e largura de 4 metros comprimento, conforme a Figura 3.

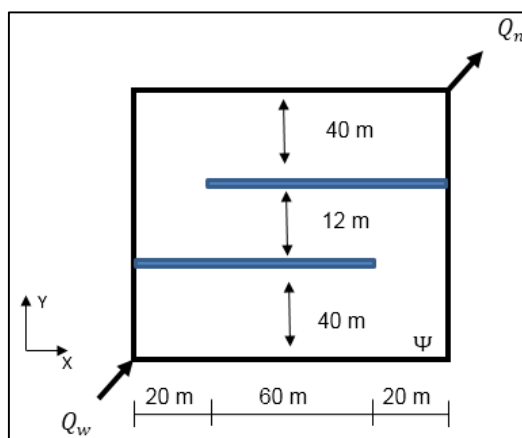


Imagem 3: Geometria do problema.

As saturações residuais foram consideradas como nulas. As viscosidades da água e óleo são, respectivamente, $\mu_w = 0,001 \text{ kg/ms}$ e $\mu_n = 0,004 \text{ kg/ms}$. A porosidade é constante em todo o domínio $\phi = 0,2$. A permeabilidade é igual a $K = 10^{-4} [\text{I}] \text{ m}^2$, e nas barras $K = 10^{-10} [\text{I}] \text{ m}^2$. As condições de contorno nos poços injetor e produtor são respectivamente: $P_{\text{injetor}} = 6,5 \times 10^4 \text{ Pa}$ e $Q_{\text{produtor}} = -11,368 \text{ m}^3/\text{dia}$. Podem-se encontrar problemas com geometria e propriedades semelhantes em Garcia (1997) e Carvalho (2005).

As Figuras 4 e 5 mostram o resultado do campo de saturação obtido com a metodologia numérica empregada para o tempo de 35 dias e 50 dias, respectivamente. Pode-se perceber uma dispersão na fronteira do escoamento da água. Vale salientar que se trata de uma dispersão física devido à mobilidade das fases e não uma dispersão numérica.

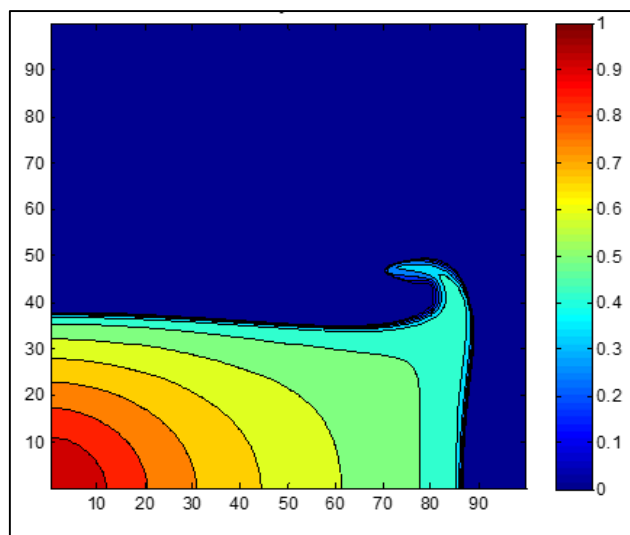


Imagem 4: Campo de saturação de água para 35 dias de produção.

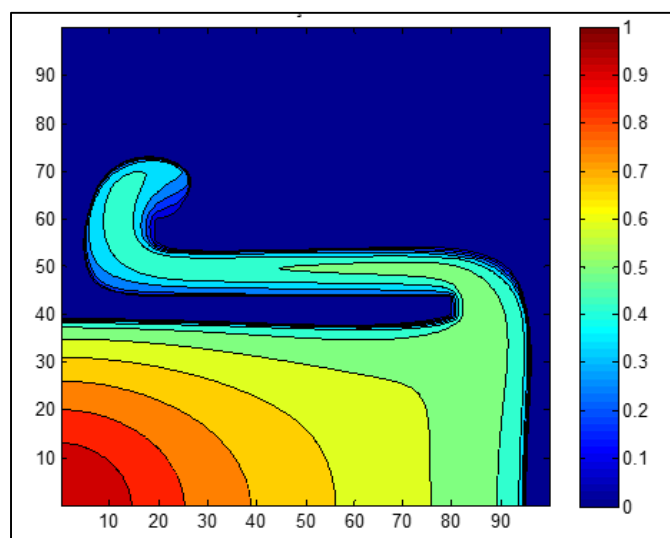
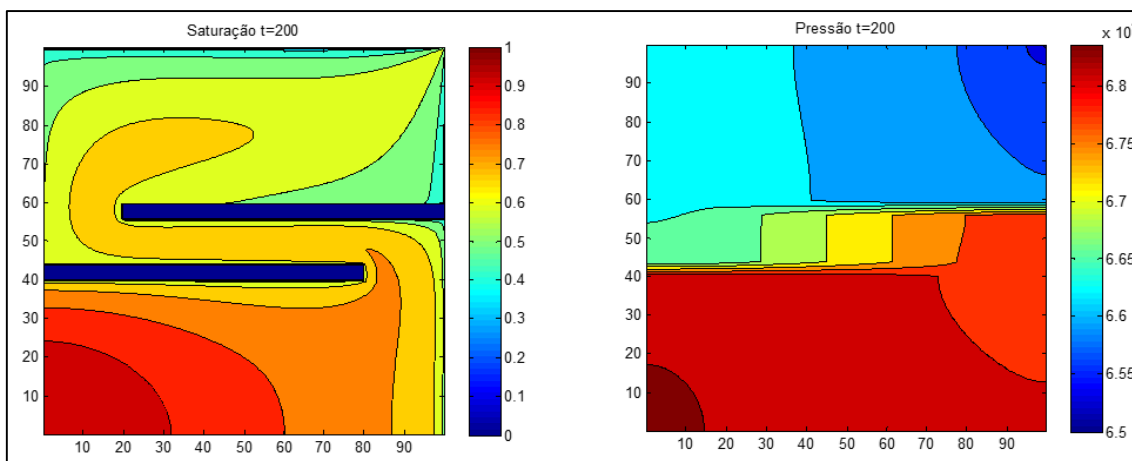


Imagem 5: Campo de saturação de água para 50 dias de produção.

A Figura 6.a mostra o resultado do campo de saturação e a Figura 6.b mostra o campo de pressão. Ambas para o tempo de 200 dias de produção.

A Figura 7 exibe o campo de pressão perfilado no eixo Z para o tempo de 200 dias. O eixo desta figura mostra valores maiores de 100, isto é devido ao uso da função de plotagem *surf*. Desta forma, os valores dos eixos correspondem ao número de volumes controle, que neste trabalho foi de 300 em cada dimensão.

Pode-se ver que, neste estudo de caso com o domínio heterogêneo, a heterogeneidade força o escoamento a mudar de direção, o que era esperado pela física do problema. Isto mostra que a metodologia, ou seja, o conjunto: modelo matemático, método numérico e implementação computacional é robusta para casos heterogêneos.



(a)

(b)

Imagem 6: a) Campo de saturação de água em 200 dias de produção. b) Campo de pressão em Pascal no tempo de 200 dias de produção.

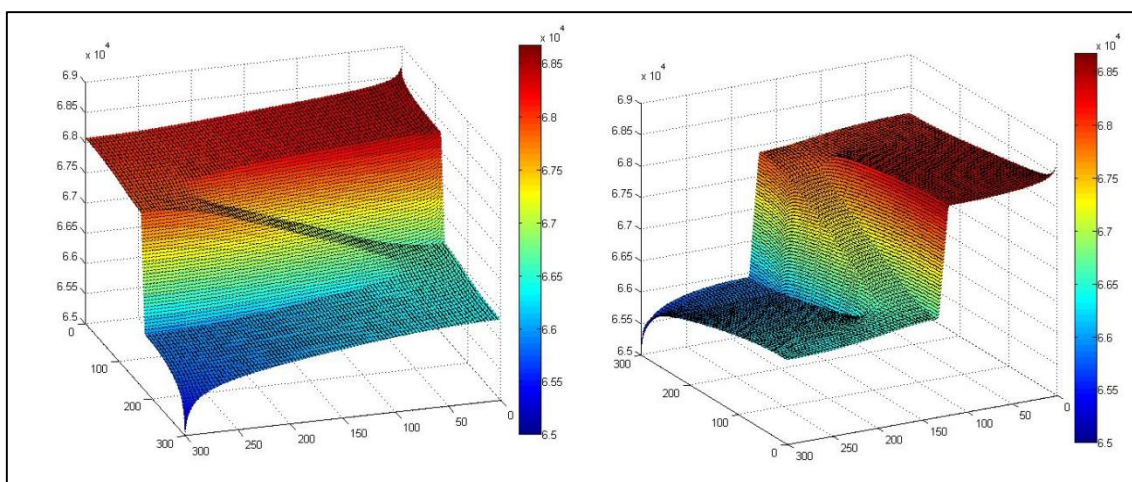


Imagem 7: Campo de pressão em Pascal perfilado no eixo z para o tempo de 200 dias.

6. Conclusão

Este artigo estudou a solução numérica de um escoamento bifásico óleo-água em reservatório de petróleo heterogêneo. Para tanto, o modelo do problema foi discretizado com o método dos Volumes Finitos, utilizando a técnica TFPA (*Two Point Flux Approximation*) com o esquema de solução IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*). Os resultados estão de acordo com a literatura.

7. Referências

- AARNES, J., GIMSE, T. & LIE, K. A. 2007. *An introduction to the numeric of flow in porous media using Matlab*, Berlin Heidelberg, Springer.
 AZIZ, K. 1979. *Pretroleum Reservoir Simulation*, Calgary, Elsevier

- CARVALHO, D. K. 2005. *Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco.
- CHEN, Z. & HUAN, G. 2006. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Filadélfia, SIAM.
- CORDAZZO, J. 2006. *Simulação de Reservatórios de Petróleo Utilizando o Método EbFVM e Multigrid Algébrico*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- FARUQUI, S. A. 1998. *Finite Difference Modeling Of Oil Recovery by Waterflooding Using Horizontal well Injectors*. PhD Thesis, Texas Tech University.
- FERNANDES, J. P. V. 2013. *Implementação da Formulação IMPES-Modificado em problemas de Elementos Finitos com Volume de Controle para Simulação de Fluxo Bifásico Com Acoplamento Geomecânico*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco.
- GARCIA, E. L. M. 1977. *Formulações de Elementos Finitos Bi e Tridimensionais Para Simulação em Paralelo de Escoamento em Reservatório de Petróleo*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- KOU, J. & SUN, S. 2004. *On iterative IMPES Formulation for two-Phase flow with capillarity in heterogeneous porous media*. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, v. 1, p. 20-40.
- LIE, K. A. 2014. *An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB User Guide for the Matlab Reservoir Simulation Toolbox (MRST)*. SINTEF ICT.
- MALISKA, C. R. 2004. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. 2ª. Edição. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora.
- MOSTAGHIMI, P., TOLLIT, B. S. & NEETHLING, S. J. A control Volume Finite Element Scheme for Analysis of Heap Leaching. 9th International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries, 2012 Melbourne, Australia.
- PEACEMAN, D. 1977, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Amsterdam, Elsevier.
- RANKIN, R. & RIVIERE, B. 2015. A high order method for solving the black-oil problem in porous media. *Advances in Water Resources*, 78, 126–144.